

La Descomposición en Valores Singulares (SVD) Aplicada a la Compresión de Imágenes Digitales

Merari Rubalcaba Vela

Modelación Matemática, Universidad Autónoma de la Ciudad de México



Objetivos

En este trabajo se presenta la aplicación de una herramienta fundamental del álgebra lineal: La Descomposición en Valores Singulares (SVD) en el procesamiento de imágenes digitales. El objetivo principal es dar a conocer y mostrar cómo se utiliza esta técnica en la compresión de imágenes.

Introducción

La historia de la compresión de imágenes digitales mediante el método de la descomposición en valores singulares se extiende desde la década de 1970 hasta la actualidad. A lo largo de los años, se ha convertido en una técnica ampliamente utilizada que ha contribuido significativamente al desarrollo de estándares de compresión de imágenes y al avance en el campo del procesamiento de imágenes digitales. Esta disciplina es de gran importancia en este campo debido a que las imágenes pueden ser representadas y manipuladas mediante matrices y vectores.

Material



Figura 1: Flor de Loto, <https://www.google.com/search?q=flor+de+loto&oeq=FlordeLoto.jpg>.

SVD

Definición

Dada una matriz A de orden $m \times n$, la fórmula de la descomposición en valores singulares es la siguiente: $A = U\Sigma V^t$, donde U y V son matrices ortogonales y Σ es una matriz diagonal generalizada cuyos elementos σ_{jj} son no negativos y aparecen en orden decreciente.

- ▶ Los valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ son únicos; sin embargo, las matrices U y V no son únicas.
- ▶ Los números $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ son los valores propios positivos de AA^t y A^tA .
- ▶ Las columnas ortogonales \hat{u}_j 's de U son los vectores propios de AA^t . Similarmente, las columnas ortogonales \hat{v}_j 's de V son los vectores propios de A^tA .
- ▶ $A\hat{v}_j = \sigma_j\hat{u}_j$ y $A^t\hat{u}_j = \sigma_j\hat{v}_j$.

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Su descomposición en valores singulares es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Resultados

Cuadro 1: Porcentaje de valores singulares.

Imagen Comprimida	Valores Singulares	Porcentaje
Imagen Comprimida 1	3	0.77
Imagen Comprimida 2	10	2.56
Imagen Comprimida 3	18	4.60
Imagen Comprimida 4	39	9.97
Imagen Comprimida 5	52	13.30
Imagen Comprimida 6	130	33.25

❖ Resultados obtenidos de una codificación propia en Matlab

Compresión de la Imagen



▶ Resultados obtenidos de una codificación propia en Matlab

Conclusiones

En resumen, la descomposición en valores singulares (SVD) se utiliza en la compresión de imágenes digitales con el objetivo de reducir la redundancia de datos y lograr compresión sin pérdida. Esto permite representar la imagen con menos información, ahorrar espacio de almacenamiento y mejorar la eficiencia en la transmisión de imágenes.

Referencias

- ▶ Singular-Value Decomposition and its Applications-Zecheng Kuang Honors Thesis.
- ▶ Notes-Singular Value Decomposition, Justin Wyss-Gallifent.
- ▶ Notes-The Singular Value Decomposition-ch7, Gilbert Strang.
- ▶ Herramientas MATLAB para el procesamiento de imágenes, tesis de Ailín Menéndez Martínez.

Agradecimientos

Aprovecho este espacio para expresar mi más profundo agradecimiento a mi asesor, el Dr. Maurilio Velasco Fuentes, por su invaluable contribución y orientación en este proyecto. Su experiencia y conocimiento han sido fundamentales para el éxito de este trabajo, y estoy sinceramente agradecida por su apoyo incondicional.

Información de Contacto

- ▶ e-mail: merari.rubalcaba@estudiante.uacm.edu.mx
- ▶ Teléfono: +52 (558) 514 0106